Sur les transformations localement topologiques.

Par HENRI CARTAN à Strasbourg.

Je me propose d'indiquer ici quelques remarques élémentaires relatives aux transformations „localement topologiques". Cet article se compose de deux parties distinctes, entre lesquelles il n'y a pas de lien logique. La première partie est relative à l'existence de *chemins de détermination* dans toute transformation localement topologique d'un domaine D en un ensemble de points intérieurs à un domaine Δ; dans le cas particulier où D et Δ sont identiques à l'ensemble des points à distance finie de l'espace, on obtient diverses conditions suffisantes pour qu'une transformation localement topologique, définie en tout point de l'espace à distance finie, soit une transformation biunivoque de cet espace en lui-même; par cette voie, on peut retrouver un théorème de M. HADAMARD.

La deuxième partie de cet exposé comporte quelques applications d'un lemme fort simple (§ 7), qui est lui-même un cas particulier d'une proposition générale (théorème fondamental, § 9) implicitement contenue dans les travaux de M. BROUWER. Comme conséquence de ce lemme, nous établirons une proposition (théorème III) relative à la *convergence des suites de transformations localement topologiques.* Dans le cas particulier des domaines *univalents,* on peut établir des propositions plus précises, d'où résulte notamment un fait assez curieux: de pures conditions métriques, imposées à une transformation localement topologique d'un domaine univalent donné, permettent d'affirmer l'univalence du domaine transformé (on trouvera un énoncé précis au théorème VI).

Qu'il me soit permis de remercier ici M. KERÉKJÁRTÓ de ses précieux conseils, et de l'hospitalité qu'il a bien voulu accorder à ce petit travail.

PREMIÈRE PARTIE.

Sur les chemins de détermination et leurs applications.

1. Nous envisagerons des *domaines abstraits* à n dimensions, c'est-à-dire des ensembles de points pour lesquels on peut définir des *voisinages* satisfaisant aux conditions de HAUSDORFF (y compris la séparabilité), chaque voisinage étant en outre homéomorphe à une hypersphère de l'espace à n dimensions.

Soient donnés deux domaines abstraits à n dimensions D et Δ. Envisageons une loi qui fasse correspondre à chaque point M de D un point P de Δ, bien déterminé, et cela de manière que P varie de façon *continue* avec M; le point P sera dit homologue de M. Nous dirons qu'une telle loi de correspondance définit une transformation *localement topologique* si elle satisfait en outre à la condition suivante: à chaque point M_0 intérieur au domaine D, on peut associer un voisinage $U(M_0)$, qui contient M_0, est intérieur à D, et est tel que deux points distincts quelconques de $U(M_0)$ aient pour homologues deux points *distincts* de Δ. Si cette condition est vérifiée, on sait, d'après le théorème de SCHOENFLIES,[1] que le point P_0 de Δ, homologue de M_0, possède un voisinage $V(P_0)$ tel que tout point de ce voisinage soit homologue d'un point (et d'un seul) du voisinage $U(M_0)$.

Étant donnée une telle transformation localement topologique, nous la désignerons par une lettre T, et nous conviendrons de dire que le domaine abstrait D, auquel on a adjoint la transformation T, définit un *domaine Δ' intérieur au domaine abstrait Δ*. On remarquera que chaque *point* du domaine Δ' est constitué par l'ensemble d'un point du domaine abstrait D, et du point homologue du domaine abstrait Δ. En résumé, par *domaine Δ' intérieur à un domaine Δ*, nous entendons l'ensemble des données suivantes: 1° un domaine abstrait D; 2° une transformation T, localement topologique dans D, qui fait correspondre à chaque point intérieur à D un point intérieur à Δ.

Étant donnés deux domaines abstraits D et Δ, et une transformation T localement topologique de D en un domaine Δ' intérieur à Δ, deux cas peuvent se présenter: ou bien il est possible de trouver, dans D, deux points distincts ayant pour homologues

[1]) Voir, par exemple, L. BROUWER, Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, *Math. Annalen*, 72 (1912), p. 55—56.

un même point de Δ, — ou bien deux points distincts de D ont toujours pour homologues deux points distincts de Δ. Dans le second cas, nous dirons que le domaine Δ' est non seulement un domaine intérieur à Δ, mais un *sous-domaine* de Δ. Ce cas est caractérisé par le fait que tout point de Δ est homologue de *zéro* ou *un* point de D. Dans le cas particulier où chaque point de Δ est homologue d'un point de D (et d'un seul), nous dirons que T est une *transformation* (localement topologique) *biunivoque de D en Δ.*

2. Plaçons-nous dans le cas général d'une transformation T, localement topologique, qui transforme D en un domaine intérieur à Δ. Il existe, dans Δ, au moins un point P_0 qui soit homologue d'au moins un point M_0 de D. Comme nous l'avons signalé plus haut, il existe, dans D, un voisinage $U(M_0)$, et, dans Δ, un voisinage $V(P_0)$, tels que tout point de $V(P_0)$ soit homologue d'un point (unique) de $U(M_0)$. On fait ainsi correspondre à chaque point P du domaine $V(P_0)$ un point M du domaine $U(M_0)$, et on vérifie facilement que cette loi de correspondance définit une transformation localement topologique du domaine $V(P_0)$ en un sous-domaine de $U(M_0)$; nous désignerons cette transformation par T^{-1}. On peut dire que $M = T^{-1}(P)$ est une fonction continue du point P (de Δ), définie dans le voisinage $V(P_0)$.

Cela étant, soit $\widehat{P_0Q_0}$ un arc de courbe continue intérieur à Δ. On peut essayer de *prolonger*, le long de cet arc, la fonction $M = T^{-1}(P)$; ce prolongement se fera à la manière du prolongement analytique, et nous croyons inutile d'insister sur ce point. Ou bien le prolongement pourra se faire jusqu'en Q_0 à l'aide d'un nombre fini d'opérations, — ou bien il existe, sur l'arc $\widehat{P_0Q_0}$, un point Q, bien déterminé, qui jouit de la propriété suivante: il est impossible d'effectuer, au moyen d'un nombre fini d'opérations, le prolongement jusqu'en Q, mais, quel que soit P intérieur à l'arc $\widehat{P_0Q_0}$, le prolongement est possible jusqu'en P à l'aide d'un nombre fini d'opérations.

La transformation T^{-1} est alors définie pour tout point de l'arc $\widehat{P_0Q}$, l'extrémité Q exceptée. L'ensemble des points de D, transformés des points de cet arc par la transformation T^{-1}, constitue une courbe continue, partant de M_0, et dont tous les points sont intérieurs à D. Je dis que, lorsque P décrit l'arc $\widehat{P_0Q}$ et *tend vers*

Q, le point $M = T^{-1}(P)$ *tend vers la frontière de D;* cette locution signifie, par définition, que les points $M = T^{-1}(P)$ n'ont aucun point d'accumulation intérieur à D quand P tend vers Q; d'une façon précise: étant donnée, sur l'arc $\widehat{P_0Q}$, une suite infinie quelconque de points $P_1, \ldots, P_k, \ldots$ qui tendent vers Q, les $T^{-1}(P_k)$ n'ont aucun point d'accumulation intérieur à D.

Démonstration: raisonnons par l'absurde. Soit N un point de D, supposé être point d'accumulation de la suite $M_k = T^{-1}(P_k)$. On peut, en extrayant au besoin de la suite P_k une suite partielle convenable, se ramener au cas où les points $M_k = T^{-1}(P_k)$ tendent vers N. Soit alors Q' le transformé de N par la transformation T. Le point Q', étant point-limite des points P_k, se confond avec Q. Or la transformation T, étant localement topologique, établit une correspondance biunivoque entre les points d'un certain voisinage $U(N)$ et ceux d'un voisinage $V(Q)$. Mais alors le prolongement de la transformation T^{-1} le long de l'arc $\widehat{P_0Q_0}$ serait possible au-delà du point Q, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Il est ainsi établi que l'arc $\widehat{P_0Q}$ est transformé, par la transformation T, d'un arc de courbe intérieur à D, partant du point M_0 et „tendant vers la frontière de D". Un tel arc sera dit „chemin de détermination", par analogie avec les chemins de détermination dans la théorie des fonctions méromorphes d'une variable complexe. Un chemin de détermination est, en somme, un arc de courbe continue, intérieur à D, qui tend vers la frontière de D, et est tel que le transformé $T(M)$ d'un point de cet arc tende vers un point Q intérieur à Δ quand M tend vers la frontière de D le long de cet arc.

Théorème I. *Soit T une transformation localement topologique d'un domaine D en un domaine intérieur à Δ; si cette transformation ne possède aucun chemin de détermination, alors T transforme D en un domaine de recouvrement*[2]) *de Δ.*

---

[2]) On dit qu'un domaine Δ', intérieur à un domaine Δ, est un *domaine de recouvrement* de Δ si tout arc de courbe continue, intérieur à Δ, et dont l'origine appartient aussi à Δ', a tous ses points intérieurs à Δ'. D'une façon plus précise, faisons intervenir le domaine abstrait D et la transformation T, localement topologique dans D, qui transforme D en Δ': Δ' sera un domaine de recouvrement de Δ, si tout arc de courbe continue, intérieur à Δ, et dont l'origine est transformée (par T) d'un point de D, est l'image (par T) d'un arc de courbe intérieur à D.

En effet, la transformation T transforme D en un domaine Δ' intérieur à Δ. D'autre part, la transformation T ne possède, par hypothèse, aucun chemin de détermination; donc la transformation T^{-1} est prolongeable le long de tout arc de courbe continue, intérieur à Δ, et partant d'un point fixe P_0 intérieur à Δ'; par suite, un tel arc de courbe est toujours l'image (par T) d'un arc de courbe intérieur à D. Le domaine Δ' est donc bien un domaine de recouvrement de Δ. Si le domaine Δ est *simplement connexe*,[3]) alors il est bien connu que tout domaine de recouvrement de Δ est nécessairement identique à Δ. D'où:

Corollaire du théorème I. *Soit donnée une transformation T, localement topologique dans un domaine D, qui transforme D en un domaine intérieur à un domaine Δ. Si cette transformation ne possède aucun chemin de détermination, et si Δ est simplement connexe, alors T est une transformation biunivoque de D en Δ* (au point de vue *abstrait*, D et Δ sont identiques).

Voyons une autre conséquence du théorème I. Soit D un domaine *clos* (c'est-à-dire un domaine qui puisse être tout entier recouvert à l'aide d'un nombre *fini* de voisinages). Si T est une transformation localement topologique du domaine D en un domaine intérieur à un domaine Δ, il est clair que T ne peut posséder de chemins de détermination, puisque D n'a pas de frontière. Donc le théorème I et son corollaire s'appliquent; on voit, en particulier, que si Δ est simplement connexe, alors Δ est clos et D est simplement connexe. Par exemple, il est impossible qu'une transformation localement topologique, définie sur la surface d'une sphère, transforme celle-ci en un domaine intérieur à un cercle; de même, il est impossible qu'une transformation localement topologique, définie sur la surface d'un tore, transforme celle-ci en un domaine intérieur au domaine (à 2 dimensions) constitué par la surface d'une sphère.

3. Avant d'appliquer le corollaire du théorème I au cas particulier où l'on prend pour D, ainsi que pour Δ, le domaine constitué par l'ensemble de tous les points (à distance finie) de l'espace euclidien E_n à n dimensions, faisons encore une remarque au sujet du théorème I et de son corollaire:

Soit T une transformation localement topologique d'un do-

---

[3]) Par domaine *simplement connexe*, nous entendons un domaine Δ tel que toute courbe fermée à une dimension, intérieure à Δ, soit réductible à zéro par déformation continue sans sortir de Δ.

maine D en un domaine intérieur à un domaine Δ supposé simplement connexe. Si l'on peut trouver une suite infinie de points intérieurs à D, sans point d'accumulation intérieur à D, et telle que leurs homologues dans Δ aient un point d'accumulation intérieur à Δ, alors on peut trouver un arc de courbe continue intérieur à D, qui tend vers la frontière de D, et dont le transformé par T tend vers un point intérieur à Δ. En effet, s'il n'existait pas de chemin de détermination, la transformation serait une transformation biunivoque de D en Δ, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse faite.

C. Q. F. D.

L'hypothèse suivant laquelle Δ est *simplement connexe* est essentielle.

La proposition précédente paraît utile dans un certain nombre de questions. Elle permet, notamment, de compléter un théorème M. CARATHÉODORY.[4] À ce propos, je dois dire que c'est M. KERÉKJÁRTÓ qui m'a signalé ce théorème, et m'a fait remarquer qu'on peut en déduire le „théorème II" du paragraphe suivant.

4. *Cas particulier des transformations localement topologiques de l'espace euclidien E_n en un domaine intérieur à E_n.* Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées (réelles) d'un point de E_n. Considérons une transformation de la forme

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

où les f_i sont définies, réelles et continues pour toutes les valeurs des variables réelles $x_1, \ldots, x_n$; supposons en outre que cette transformation soit *localement topologique,* c'est-à-dire qu'à chaque système $a_1, \ldots, a_n$ on puisse faire correspondre un $\varepsilon > 0$ tel que les relations

[4]) C. CARATHÉODORY, Sur les transformations ponctuelles, *Bulletin de la Soc. math. de Grèce,* **5** (1923), p. 12—19. Dans l'énoncé du théorème de CARATHÉODORY, on peut remplacer l'hypothèse *d*) par l'hypothèse moins restrictive suivante (que nous formulons en conservant les notations de M. CARATHÉODORY):

d') un arc de courbe continue, intérieur à A' (y compris ses extrémités), n'est jamais l'image d'une courbe de $[R]$ qui tend vers l'infini.

Faisons encore deux remarques sur ce théorème: 1° l'hypothèse, faite par M. CARATHÉODORY, que $[R]$ est partout dense dans E_n, est inutile; 2° le fait que $[S']$ est *fermé* ne résulte pas de ce que $[S]$ est fermé, mais est une conséquence des hypothèses *a, b, c, d.*

$$\left\{\begin{array}{ll} f_i(x_1,\ldots,x_n)=f_i(y_1,\ldots,y_n) & \\ |x_i-a_i|<\varepsilon, \quad |y_i-a_i|<\varepsilon \end{array}\right. \qquad (i=1,\ldots,n)$$

entraînent $x_i=y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Cela étant, proposons-nous de chercher des conditions *suffisantes* pour que les formules (1) définissent une transformation *biunivoque* de l'espace E_n en lui-même, c'est-à-dire pour que le système (1) soit équivalent à un système de la forme

$$x_i=g_i(x'_1,\ldots,x'_n),$$

les g_i étant définies, réelles et continues pour toutes les valeurs des variables réelles $x'_1,\ldots,x'_n$. Appliquons précisément le corollaire du théorème I. Nous obtenons le

Théorème II. *Si la transformation* (1) *ne possède pas de chemin de détermination, c'est une transformation biunivoque de E_n en lui-même.*

Corollaire. *Si la transformation* (1) *déplace chaque point de E_n d'une distance plus petite qu'un nombre fixe, c'est-à-dire si l'on a les inégalités*

$$|f_i(x_1,\ldots,x_n)-x_i|<M,$$

alors (1) *est une transformation biunivoque de E_n en lui-même; autrement dit, les fonctions f_i prennent une fois et une seule tout système de valeurs.* En effet, l'hypothèse faite exclut l'existence d'un chemin de détermination.

Plus généralement, soit $l(r)$ le minimum de la distance, à un point fixe, des transformés des points de l'hypersphère $\Sigma(x_i)^2=r^2$. *Si l'on a*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ l(r)=+\infty,$$

alors (1) *est une transformation biunivoque de E_n en lui-même.* En effet, dans ce cas, il ne peut exister de chemin de détermination. *Il en sera ainsi, en particulier, si $l(r)$ augmente indéfiniment avec r.*

Complément au théorème II. *Si* (1) *n'est pas une transformation biunivoque de E_n en lui-même, non seulement la transformation* (1) *possède un chemin de détermination, mais, d'une façon précise, il existe dans E_n une courbe continue qui tend vers l'infini, et dont la transformée par* (1) *est un segment de droite de longueur finie.* En effet, soient M_0 un point de E_n, et P_0 son transformé; je dis que la transformation T^{-1}, inverse de (1), ne peut pas se prolonger le long de chaque demi-droite issue de P_0; la proposition annoncée en résultera évidemment. Pour faire la démonstration, raisonnons par l'absurde. Supposons que T^{-1} puisse se prolonger le long de chaque demi-droite issue de P_0; alors T^{-1} transformerait E_n en un domaine D intérieur à E_n, et, par suite, E_n serait transformé de D par T; il en résulte que deux points distincts de D auraient toujours des coordonnées différentes, et que D ne posséderait aucun point frontière à distance finie; donc D serait identique à E_n. Ainsi, T serait une transformation biunivoque de E_n en lui-même, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Cela étant, chaque fois que nous connaîtrons une condition *nécessaire* pour qu'une transformation localement topologique, de la forme (1), possède un chemin de détermination dont l'image soit un segment de droite fini, alors, en exprimant que cette condition *n'est pas remplie,* nous obtiendrons une condition *suffisante* pour que (1) soit une transformation biunivoque de E_n en lui-même. Cette remarque nous conduit à une démonstration très simple d'un ancien théorème de M. HADAMARD.[5])

Supposons en effet, avec M. HADAMARD, que les fonctions $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ admettent des dérivées partielles du premier ordre continues, le déterminant fonctionnel étant partout différent de zéro. M désignant un point quelconque de E_n, considérons un arc ds infiniment petit issu de M, et son transformé ds' par la transformation (1); lorsque la tangente au premier arc prend toutes les directions possibles issues de M, le rapport des longueurs $\frac{ds'}{ds}$ admet un *minimum non nul,* que nous désignerons par $\lambda(M)$. Soit $\mu(r)$ le minimum de $\lambda(M)$ quand M décrit l'hypersphère

$$\sum (x_i)^2 = r^2.$$

Si la transformation (1) possède un chemin de détermination dont l'image est un segment de droite de longueur finie, l'intégrale $\int \lambda(M)\, ds$, étendue au chemin de détermination, est évidemment finie. A fortiori, l'intégrale

[5]) J. HADAMARD, Sur les transformations ponctuelles, *Bulletin de la Soc. math. de France,* 34 (1906), p. 71—81.

$$\int_{r_0}^{+\infty} \mu(r)\, dr$$

est *finie*. D'où le théorème d'Hadamard:

Si l'intégrale $\int_{r_0}^{+\infty} \mu(r)\, dr$ *est divergente, la transformation* (1) *est une transformation biunivoque de* E_n *en lui-même.*

DEUXIÈME PARTIE.

Convergence des suites de transformations localement topologiques.

5. Nous n'envisagerons désormais que des domaines intérieurs à l'espace euclidien E_n à n dimensions réelles (il s'agit de l'espace à distance finie). Chaque point d'un domaine D, intérieur à E_n, est affecté de n coordonnées réelles; nous désignerons par $\overline{M}$ le point de E_n qui a les mêmes coordonnées, et nous l'appellerons point *associé* à M. D sera un *sous-domaine* de E_n, si deux points distincts de D ont toujours pour associés deux points distincts de E_n; dans ce cas, on dit aussi que le domaine D est *univalent*. Dans le cas contraire, D sera dit *multivalent*.

Lorsque nous parlerons d'un *domaine*, sans autre précision, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit d'un domaine intérieur à l'espace E_n. Un tel domaine est toujours *orientable*.

Soit D un domaine intérieur à E_n. On peut envisager des domaines qui soient eux-mêmes intérieurs à D; un domaine D_1 intérieur à D est, comme on l'a vu dans la première partie, défini par deux données: 1° un domaine abstrait Δ; 2° une transformation T, localement topologique dans ce domaine abstrait, qui fait correspondre à chaque point de Δ un point intérieur à D. Puisque D est lui-même intérieur à E_n, on déduit de là une transformation localement topologique de Δ en un domaine $\overline{D}_1$ intérieur à E_n. Inversement, tout domaine D_1 intérieur à un domaine D, lui-même intérieur à E_n, peut être considéré comme défini par deux données: 1° un domaine $\overline{D}_1$ intérieur à E_n; 2° une loi de correspondance continue, qui associe à chaque point de $\overline{D}_1$ un point bien déterminé de D, ayant les mêmes coordonnées.

Le domaine D_1 sera un *sous-domaine* de D, si cette loi associe toujours deux points distincts de D à deux points distincts de $\overline{D}_1$. Il est clair que si D est univalent, et si D_1 est un sous-domaine de D, alors $\overline{D}_1$ est univalent.

6. *Sur la convergence des suites de transformations localement topologiques.*[6]) Soit Δ un domaine abstrait à n dimensions, et soit T une transformation localement topologique de Δ en un domaine D intérieur à E_n. Soit encore une suite infinie de transformations $T_1, \ldots, T_p, \ldots$; supposons que chaque T_p soit une transformation localement topologique de Δ en un domaine D_p intérieur à E_n. Nous dirons que les transformations $T_1, \ldots, T_p, \ldots$ *convergent uniformément vers la transformation* T, si à chaque $r > 0$ on peut associer un entier $k(r)$ tel que, pour tout entier $p > k(r)$, la distance des points $T_p(M)$ et $T(M)$[7]) soit inférieure à r quel que soit le point M de Δ.

Cela posé, nous nous proposons de comparer les domaines D_p au domaine D. Voici ce que nous allons démontrer à ce sujet: prenons arbitrairement un sous-domaine Δ' du domaine Δ, complètement intérieur[8]) à Δ; désignons par D' le domaine $T(\Delta')$, et par D'_p le domaine $T_p(\Delta')$. Il existe un nombre positif r, tel que tout point M de D' soit centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D.[9]) Cela étant:

---

[6]) Le cas particulier de la convergence des suites de transformations *pseudo-conformes* (c'est-à-dire définies par n fonctions analytiques de n variables complexes) a été étudié par M. Carathéodory, Über die Abbildungen, die durch Systeme von Funktionen von mehrerer Veränderlichen erzeugt werden, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), p. 754—792: voir notamment p. 769—777.

[7]) Les points $T_p(M)$ et $T(M)$ sont deux points de l'espace euclidien E_n; par *distance* de deux points $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de cet espace, nous entendons la quantité

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

[8]) Δ' est dit *complètement intérieur* à Δ si, étant donné un ensemble infini quelconque de points intérieurs à Δ', et l'ensemble des points associés dans Δ, ce dernier ensemble admet au moins un point d'accumulation intérieur à Δ.

[9]) Cette locution signifie, d'une façon précise, que l'on peut trouver un sous-domaine Σ de D, tel que $\overline{\Sigma}$ soit une hypersphère, et que le point de Σ qui a pour coordonnées celles du centre de $\overline{\Sigma}$ ait pour associé dans D le même point qui est associé au point M de D'.

Théorème III. 1° *Si* $p > k(r)$, *le domaine* D_p *a la même orientation que le domaine* D, *et le domaine* D' *est un sous-domaine du domaine* D_p;

2° *en outre, si* $p > k\left(\frac{r}{2}\right)$, *le domaine* D'_p *est un sous-domaine du domaine* D.

Cet énoncé demande quelques explications. D'abord, puisque Δ peut se transformer, par le moyen de T, en un domaine intérieur à E_n, Δ est orientable. Supposons donc que Δ ait été orienté; il en résulte une orientation pour $D = T(\Delta)$, et une orientation pour $D_p = T_p(\Delta)$; on peut supposer que l'on a orienté Δ de façon que l'orientation de D se trouve en accord avec l'orientation de E_n; si alors l'orientation de D_p se trouve aussi en accord avec celle de E_n, nous dirons que D_p *a la même orientation que* D; sinon, nous dirons que D_p *et* D *ont des orientations contraires.*

Dans l'énoncé du théorème III, 1°, il y a la phrase: „le domaine D' est un sous-domaine du domaine D_p". C'est là une façon abrégée de dire: „il existe un sous-domaine E du domaine D_p, tel que les domaines $\overline{E}$ et D' soient identiques" (cf. § 5); ou, ce qui revient au même: „il est possible d'associer à chaque point M de D' un point P de D_p ayant les mêmes coordonnées que M, cette loi de correspondance étant univoque, continue, et telle que deux points distincts de D' aient toujours pour associés deux points distincts de D_p".

La partie 2° de l'énoncé du théorème III peut être précisée d'une façon analogue.

7. Pour établir le théorème III, nous nous servirons d'un lemme fort simple:

Lemme. *Soit* Σ *une hypersphère de centre* O, *de rayon* R, *et de frontière* Φ. *Soit* T *une transformation définie et continue dans* $(\Sigma + \Phi)$, *et localement topologique dans* Σ. *Supposons que la distance d'un point quelconque de* Φ *à son transformé soit inférieure à un nombre fixe* $\varrho < R$. *Alors la transformation* T *conserve l'orientation, et transforme* Σ *en un domaine* (univalent ou multivalent) *qui contient le point* O *une fois et une seule.*[10])

[10]) Ceci veut dire, d'une façon précise, qu'il existe, dans le domaine $T(\Sigma)$, un point et un seul ayant pour coordonnées celles du point O.

Ce lemme, qui du reste n'est vraisemblablement pas nouveau, sera démontré plus loin comme conséquence d'une proposition plus générale (théorème fondamental) que l'on peut déduire des résultats de M. Brouwer. Admettons provisoirement le lemme précédent, et tirons-en une démonstration du théorème III.

Effectuons d'abord la transformation T^{-1} de D en Δ, puis la transformation T_p de Δ en D_p. Si l'on pose

$$T_p T^{-1} = U_p,$$

la transformation U_p est une transformation localement topologique de D en D_p.

Le théorème III résulte alors du théorème suivant (nous écrivons U au lieu de U_p):

Théorème IV. 1⁰ *Si une transformation localement topologique U déplace chaque point de D d'une distance inférieure à r, cette transformation conserve l'orientation, et le domaine D' est un sous-domaine du domaine $U(D)$;*

2⁰ *Si en outre U déplace chaque point de D d'une distance inférieur à $\frac{r}{2}$, le domaine $U(D')$ est un sous-domaine du domaine D.*

Rappelons que, par hypothèse, D' est un sous-domaine de D, et que tout point de D' est centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D.

Démonstration de 1⁰. Soit M un point quelconque de D'; M, étant intérieur à D', est centre d'une hypersphère Σ_M, intérieure à D, de rayon $r + \varepsilon_M$ ($\varepsilon_M > 0$ assez petit). Le lemme, appliqué à cette hypersphère et à la transformation U, montre que U conserve l'orientation, et que le domaine $U(\Sigma_M)$ contient une fois et une seule le point $\overline{M}$ ($\overline{M}$ désignant le point de l'espace qui a les mêmes coordonnées que M). Il existe donc, dans Σ_M, un point P_M et un seul, tel que le point $U(P_M)$ ait les mêmes coordonnées que M; le point P_M est un point bien déterminé du domaine D. Nous associons ainsi à chaque point M de D' un point P_M de D, bien déterminé, tel que M ait les mêmes coordonnées que $U(P_M)$; cette loi de correspondance est continue. Si nous montrons en outre qu'à deux points distincts M_1 et M_2 du domaine D', elle associe toujours deux points distincts P_{M_1} et P_{M_2} du domaine D, alors nous aurons établi la première partie du théorème.

Or, si P_{M_1} et P_{M_2} étaient confondus en un même point de D, alors $U(P_{M_1})$ et $U(P_{M_2})$ auraient les mêmes coordonnées; donc M_1 et M_2 auraient les mêmes coordonnées, tout en étant deux points distincts de D'. Les hypersphères Σ_{M_1} et Σ_{M_2}, tout en étant confondues dans l'espace, seraient deux sous-domaines différents de D; mais c'est impossible, puisque Σ_{M_1} contient P_{M_1}, que Σ_{M_2} contient P_{M_2}, et que P_{M_1} et P_{M_2} sont confondus en un même point de D.

C. Q. F. D.

Démonstration de 2°. Supposons que U déplace chaque point de D d'une distance inférieure à $\frac{r}{2}$. Soit alors M un point quelconque de D'; M est centre d'une hypersphère Σ_M, de rayon $r+\varepsilon_M$, intérieure à D. La transformation U transforme le centre M de Σ_M en un point Q_M intérieur à Σ_M. Ce point Q_M, considéré comme appartenant à l'hypersphère Σ_M elle-même intérieure à D, peut être considéré comme un point bien déterminé du domaine D. Nous avons donc une loi qui, à chaque point M de D', associe un point Q_M de D ayant les mêmes coordonnées que $U(M)$; cette loi définit une correspondance continue; si nous montrons en outre que, à deux points distincts M_1 et M_2 de D', elle associe toujours deux points distincts du domaine D, nous aurons établi la seconde partie du théorème IV.

Or, si Q_{M_1} et Q_{M_2} sont confondus en un même point Q de D, l'hypersphère $\overline{S}$, de centre $\overline{Q}$ et de rayon $\frac{r}{2}+\frac{\varepsilon_{M_1}}{2}$, contient $\overline{M}_1$ et $\overline{M}_2$ (puisque la distance de $\overline{Q}$ à $\overline{M}_1$ ou à $\overline{M}_2$ est au plus égale à $\frac{r}{2}$, d'après l'hypothèse faite sur la transformation U). Donc $\overline{S}$ est intérieure à $\overline{\Sigma}_{M_1}$. Par suite, l'hypersphère S, de centre Q et de rayon $\frac{r}{2}+\frac{\varepsilon_{M_1}}{2}$, est intérieure à D. Le lemme, appliqué à l'hypersphère S et à la transformation U, montre que S contient un point et un seul dont le transformé a les mêmes coordonnées que Q. Mais, d'autre part, S contient M_1 et M_2; il faut donc que M_1 et M_2 soient confondus.

C. Q. F. D.

Corollaire du théorème IV, 2°. *Soient D un domaine univalent, et D' un sous-domaine de D, complètement intérieur à D.*

Soit r un nombre positif tel que tout point de D' soit centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D. Si une transformation U, localement topologique dans le domaine D, déplace chaque point de D d'une distance au plus égale à $\frac{r}{2}$, alors le domaine $U(D')$ est univalent.

En effet, d'après la deuxième partie du théorème IV, $U(D')$ est un sous-domaine du domaine D; comme D est univalent, $U(D')$ est univalent.

Il est curieux qu'une pure condition *métrique*, imposée à la transformation U, entraîne pour conséquence que cette transformation soit *univalente* dans le sous-domaine D' du domaine D. De ce point de vue, cette proposition se rattache au Corollaire du théorème II (première partie de ce travail).

Nous allons voir (théorème VI) que le corollaire du théorème IV peut encore être précisé davantage, dans le cas où D est univalent et borné.

8. Supposons désormais que le domaine D soit univalent et borné. La première partie du théorème IV peut alors être précisée comme suit:

Théorème V. *Soit D un domaine univalent et borné, et soit D' un sous-domaine de D, tel que tout point de D' soit centre d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D. Si une transformation U, définie et continue dans D et sur sa frontière, est localement topologique dans D et déplace chaque point de la frontière de D d'une distance au plus égale à un nombre fixe $\varrho < r$, alors U conserve l'orientation, et le domaine $U(D)$*[11]*) contient une fois et une seule chaque point de D', ainsi que chaque point frontière de D'.*

Le théorème V sera démontré plus loin comme conséquence d'un *théorème fondamental* auquel il a déjà été fait allusion. Si on applique le théorème V au cas où D et D' sont deux hypersphères concentriques, on retrouve le *lemme* du paragraphe **7.**

Admettons provisoirement le théorème V. Nous allons en déduire le

Théorème VI. *Soit D un domaine univalent et borné, et soit D' un sous-domaine de D, tel que tout point de D' soit centre*

[11]) Ce domaine n'est pas forcément univalent.

d'une hypersphère, de rayon r, intérieure à D. Soit U une transformation définie et continue dans D et sur sa frontière; supposons que U soit localement topologique dans D et déplace chaque point du domaine $(D-D')$[12]) *d'une distance au plus égale à un nombre fixe* ϱ. *Alors, si* $\varrho < \frac{r}{2}$, *le domaine* $U(D')$ *est univalent* (et, bien entendu, complètement intérieur à D).

D é m o n s t r a t i o n. Considérons l'ensemble des points M du domaine D qui jouissent de la propriété suivante: M est intérieur à au moins une hypersphère de rayon $\frac{r}{2}$, dont le centre appartient à D'. Cet ensemble constitue un sous-domaine D_1 (connexe) du domaine D. Il est clair que tout point de D_1 est centre d'une hypersphère, de rayon $\frac{r}{2}$, intérieure à D. Appliquons alors le théorème V au domaine D et à son sous-domaine D_1: on voit que $U(D)$ contient une fois et une seule chaque point de D_1 et chaque point frontière de D_1. Il en résulte que la transformation U^{-1} (inverse de U) est définie et continue dans D_1 et sur sa frontière, et qu'elle est localement topologique dans D_1.

D'autre part, toujours en vertu du théorème V, le domaine $U(D-D')$ contient une fois et une seule chaque point frontière de D_1. Donc la transformation U^{-1} transforme chaque point frontière M de D_1 en un point P de $(D-D')$; on a ainsi

$$M = U(P),$$

et par suite, d'après l'hypothèse de l'énoncé, la distance de M à $P = U^{-1}(M)$ est au plus égale à ϱ.

Appliquons maintenant le théorème V au domaine D_1 et à la transformation U^{-1}. On voit que chaque point de D' appartient une fois et une seule au domaine $U^{-1}(D_1)$; donc U transforme D' en un sous-domaine de D_1. En particulier, le domaine $U(D')$ est *univalent*.

C. Q. F. D.

C o m p l é m e n t a u t h é o r è m e VI. D, D', la transformation U, les nombres r et ϱ ayant la signification indiquée dans

---

12) Cette notation désigne le domaine obtenu en enlevant de D les points qui ont les mêmes coordonnées que les points de D'.

l'énoncé du théorème VI, celui-ci affirme que si $\varrho<\frac{r}{2}$, le domaine $U(D')$ est univalent. Nous allons voir que *la limite supérieure $\frac{r}{2}$, ainsi assignée à ϱ, ne peut pas être améliorée.* Autrement dit, si petit que soit $\varepsilon>0$, on peut trouver un D, un D', et une transformation U telle que $\varrho<\frac{r}{2}+\varepsilon$, et telle néanmoins que le domaine $U(D')$ soit multivalent.

Bornons-nous, pour simplifier, au cas de deux dimensions. Appelons x et y les coordonnées (rectangulaires); considérons les cercles

$$\text{(D)} \qquad x^2+y^2\leqq\left(1+\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$\text{(D')} \qquad x^2+y^2\leqq\left(1-\frac{r}{2}\right)^2.$$

On peut évidemment trouver une transformation T, localement topologique, du cercle

$$\text{(C)} \qquad x^2+y^2\leqq 1,$$

de façon que T déplace chaque point de ce cercle d'une distance $\leqq\varepsilon$, et transforme néanmoins ce cercle en un domaine *multivalent.* Si $\eta>0$ est assez petit, T transformera aussi le cercle

$$\text{(C')} \qquad x^2+y^2\leqq(1-\eta)^2$$

en un domaine multivalent.

D'autre part, on peut trouver une transformation T_1, localement topologique, du cercle D, qui déplace chaque point de $(D-D')$ d'une distance au plus égale à $\frac{r}{2}$, et qui transforme D en C, et D' en C'. La transformation $U=TT_1$ est localement topologique dans D et déplace chaque point de $(D-D')$ d'une distance au plus égale à $\frac{r}{2}+\varepsilon$; néanmoins, le domaine $U(D')$ est multivalent.

C. Q. F. D.

9. Comme nous l'avons déjà dit, le théorème V, ainsi que le lemme du § **7**, est un cas particulier d'une proposition générale que l'on peut déduire des résultats de M. Brouwer,[13]) et que voici (la démonstration en sera donnée au § **10**):

[13]) *Math. Annalen,* tomes **70, 71, 72.**

T h é o r è m e f o n d a m e n t a l. *Soient D un domaine, et D_1 un sous-domaine de D, complètement intérieur à D. Soit T une transformation localement topologique de D en un domaine D'; supposons que, en ce qui concerne le domaine $(D-D_1)$,*[14] *la transformation T soit réductible à la transformation identique,* c'est-à-dire que l'on puisse trouver une transformation[15]

$$\overline{M}' = T(M, \lambda)$$

qui dépende d'un paramètre λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, et qui jouisse des propriétés suivantes: 1° pour chaque valeur de λ, elle fait correspondre à chaque point M du domaine $(D-D_1)$ un point $\overline{M}'$ de l'espace E_n; 2° $\overline{M}'$ est une fonction *continue* par rapport à l'ensemble des variables M et λ; 3° pour $\lambda = 0$, $T(M, 0) = \overline{M}$, et, pour $\lambda = 1$, $T(M, 1) = T(M)$.

Soit maintenant $\overline{P}$ un point de E_n, tel que le point $\overline{M}' = T(M, \lambda)$ soit distinct de $\overline{P}$ quels que soient M (intérieur à $D-D_1$) *et λ Alors, si D ne contient pas $\overline{P}$,*[16] *D' ne contient pas $\overline{P}$; si D contient $\overline{P}$ k fois*[17] $(k > 0)$, *la transformation T conserve l'orientation, et D' contient $\overline{P}$ k fois.*

Indiquons tout de suite comment, du théorème fondamental, on peut déduire le théorème V. Reprenons les notations du théorème V, en écrivant toutefois T au lieu de U, et $\varDelta$ au lieu de D'. Soit ϱ_1 une quantité comprise entre ϱ et r. La transformation T, étant continue dans D et sur sa frontière, déplace d'une distance inférieure à ϱ_1 chaque point de D assez voisin de la frontière de D. On peut donc trouver un sous-domaine D_1 du domaine D, complètement intérieur à D, tel que: 1° tout point de $\varDelta$ (et aussi tout point frontière de $\varDelta$) soit centre d'une hypersphère, de rayon ϱ_1, intérieure à D_1; 2° tout point de $(D-D_1)$ soit déplacé par T

---

[14] Cette notation désigne le domaine obtenu en enlevant de D les points associés aux points de D_1.

[15] Il n'est pas nécessaire de supposer que cette transformation soit localement topologique pour les valeurs de λ comprises entre 0 et 1.

[16] C'est-à-dire si aucun point de D n'a pour coordonnées celles du point $\overline{P}$.

[17] D ne peut contenir $\overline{P}$ qu'un nombre fini de fois, car, d'après les hypothèses, le domaine $(D-D_1)$ ne contient pas le point $\overline{P}$; d'autre part, le domaine D_1 ne peut contenir le point $\overline{P}$ qu'un nombre fini de fois, puisque D_1 est complètement intérieur à D.

d'une distance moindre que ϱ_1. Dans ces conditions, si M est un point quelconque de $(D-D_1)$, le segment de droite qui joint M à $T(M)$ est tout entier extérieur à $\varDelta$. Désignons alors par

$$T(M, \lambda) \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

le point de ce segment de droite qui le partage dans le rapport $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$; soit enfin $\overline{P}$ un point (fixe) quelconque de $\varDelta$. On voit que toutes les conditions d'application du théorème fondamental sont remplies, ce qui démontre le théorème V, et, plus particulièrement, le lemme du § **7.**

Le théorème fondamental s'applique, en somme, à un domaine D *intérieur à l'espace* E_n, et à une transformation localement topologique T du domaine D en un domaine D' également *intérieur à* E_n. Il est clair que ce théorème resterait vrai si l'on remplaçait l'espace E_n par un domaine $\varDelta$ qui lui soit homéomorphe. Mais *il pourrait devenir faux si l'on remplaçait E_n par un domaine $\varDelta$ non homéomorphe à E_n*. Par exemple, prenons pour $\varDelta$ la surface d'un tore; soient C et C' deux courbes fermées tracées sur ce tore, non homologues à zéro, mais homologues entre elles; si ces courbes n'ont aucun point commun, elles limitent, sur la surface du tore, deux domaines (à 2 dimensions) D et D' sans points communs. Il existe une transformation localement topologique de D en D', qui laisse fixe chaque point frontière de D: le théorème fondamental est évidemment en défaut pour une telle transformation.

10. *Démonstration du théorème fondamental.* Le domaine D ayant été orienté en accord avec l'espace E_n, prenons pour orientation de D' celle qui résulte de l'orientation de D par la transformation T. Suivant que l'orientation de D' est en accord avec celle de E_n ou ne l'est pas, T conserve l'orientation ou ne la conserve pas.

Cela étant, décomposons E_n en hypercubes d'arêtes ε, le point $\overline{P}$ étant intérieur à l'un de ces hypercubes. On peut prendre ε assez petit pour que, M étant un point quelconque de D_1, l'hypercube qui contient M soit tout entier intérieur à D; le domaine D_1 se trouve alors recouvert à l'aide d'un nombre *fini* d'hypercubes tous intérieurs à D (il importe de remarquer qu'un même hypercube de l'espace peut intervenir plusieurs fois, sur des „feuillets“ différents du domaine D). Nous partagerons ces hypercubes en tétraèdroïdes ou simplexes, auxquels nous donnerons l'orientation positive, c'est-à-dire, par définition, une orientation en accord avec celle choisie pour l'espace E_n. Étant donnée une telle décomposition (δ) en simplexes, l'ensemble de tous les simplexes de (δ) constitue un domaine Δ, limité par des faces que nous appellerons les *faces frontières* de la décomposition (δ). Les sommets des faces frontières appartiennent au domaine ($D-D_1$).

À la décomposition (δ) correspond une *approximation simpliciale* de la transformation T; pour la définir, on fait correspondre à chaque simplexe S de (δ), le simplexe S' ayant pour sommets les transformés des sommets de S par la transformation T. Parmi ces nouveaux simplexes, comptons ceux qui contiennent $\overline{P}$;[18]) soit p le nombre de ceux dont l'orientation est positive, et q le nombre de ceux dont l'orientation est négative. *Le nombre $p-q$ est indépendant de l'approximation simpliciale choisie, pourvu que ε soit assez petit;* de plus, *ce nombre est égal à $\eta k'$*, k' désignant le nombre de fois que le domaine D' contient $\overline{P}$, et η étant égal à $+1$ si T conserve l'orientation, à -1 si T change l'orientation.[19])

D'autre part, *l'intégrale de* KRONECKER, étendue à la frontière orientée d'un simplexe orienté de E_n, est égale à zéro si $\overline{P}$ est extérieur à ce simplexe, à $+1$ si $\overline{P}$ est intérieur et si l'orientation du simplexe est positive, à -1 si $\overline{P}$ est intérieur et si l'orien-

---

[18]) On peut toujours s'arranger pour que $\overline{P}$ ne tombe sur la frontière d'aucun simplexe.

[19]) En effet, si D' contient k' fois le point $\overline{P}$, le domaine D_1 contient k' points $A_1, \ldots, A_{k'}$ qui sont transformés par T en $\overline{P}$. Chaque point A_i ($i=1,\ldots,k'$) est intérieur à un petit domaine univalent V_i, intérieur à D_1, et dont le transformé par T est univalent. Cela étant, les simplexes de la décomposition (δ) se partagent en deux catégories: ceux qui sont intérieurs à l'un au moins des domaines V_i, et les autres. Dans l'approximation simpliciale de la transformation T, les transformés des simplexes de la deuxième catégorie ne contiennent pas $\overline{P}$; quant aux transformés des simplexes intérieurs au domaine V_i, la différence entre le nombre de ceux qui contiennent $\overline{P}$ et sont orientés positivement, et le nombre de ceux qui contiennent $\overline{P}$ et sont orientés négativement, est égale à ± 1 ($+1$ si T conserve l'orientation, -1 dans le cas contraire). Du moins, tout cela est vrai dès que ε est assez petit, comme l'a montré M. BROUWER.

tation est négative. Donc, d'une part l'entier k sera égal à l'intégrale de KRONECKER étendue aux faces frontières de la décomposition (δ); d'autre part, $\eta k'$ sera égal à l'intégrale de KRONECKER étendue aux faces homologues dans l'approximation simpliciale. Cela va nous permettre de conclure que $k = \eta k'$, ce qui démontrera le théorème; en effet, de cette relation on déduira: 1° si $k = 0$, que $k' = 0$; 2° si $k > 0$, que l'on a $\eta = +1$ et $k' = k$.

Pour montrer $k = \eta k'$, nous allons faire intervenir la transformation

$$\overline{M}' = T(M, \lambda)$$

de l'énoncé. Aux sommets des faces frontières de la décomposition (δ), elle fait correspondre des points, qui varient avec λ, et qui, d'après les hypothèses de l'énoncé, restent distants du point P d'une quantité supérieure à un nombre positif fixe. Cela étant, à chaque face frontière F de (δ) (une telle face est un simplexe à $n-1$ dimensions) et à chaque valeur de λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ nous ferons correspondre le simplexe à $n-1$ dimensions ayant pour sommets les transformés, par $\overline{M}' = T(M, \lambda)$, des sommets de la face F. À l'ensemble des faces frontières de (δ) correspondra ainsi, pour chaque valeur de λ, une variété fermée orientée (à $n-1$ dimensions) qui se déformera de façon continue sans jamais passer par $\overline{P}$ (du moins si ε a été choisi assez petit). L'intégrale de KRONECKER, étendue à cette variété, sera une fonction continue de λ; comme elle est égale à un nombre entier, sa valeur est indépendante de λ, et l'on a par suite

$$k = \eta k'.$$

C. Q. F. D.

(Reçu le 18 mai 1933.)